数理解析研究所講究録
824巻 1993年 187-197



# Blow-up of solutions of quasilinear degenerate parabolic equations with convection

都立大　望月 清 (Kiyoshi Mochizuki)
航空高専　鈴木 龍一 (Ryuichi Suzuki)

次のような熱源とconvection term を持つ一次元空間のporous media型方程式のCauchy問題を考える。

$$(1)\quad \partial_t\beta(u) - u_{xx} + g(u)_x = f(u) \quad x\in\mathbb{R},\ t>0$$

$$(2)\quad u(x,0) = \varphi(x) \quad x\in\mathbb{R}.$$

ただし、$\beta(v)$, $g(v)$, $f(v)$, $\varphi(x)$ は非負で次の条件を満たすとする。

(A1) $\beta(v), f(v), g(v) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)\cap C(\overline{\mathbb{R}_+})$,
$\beta(v), \beta'(v) > 0$, $\beta''(v)\le 0$. $f(v), g(v), g'(v)>0$, for $v>0$,
$f\circ\beta^{-1}$, $g\circ\beta^{-1}$ は、$[\beta(0),\infty)$ で局所リプシッツ連続.

(A2) $\{g\circ\beta^{-1}\}'(v) \le C\sqrt{\{\beta^{-1}(v)\}'}$ near $v=0$.

(1)は物理、化学、生物などにあらわれる様々な現象のモデルで、例えばプラズマのモデルにおいては、$\beta(u(x,t))$ は温度、$g(u)_x$ は対流項、$f(u)$は熱源を表す。

方程式の例としては

$$(3)\quad (u^{\frac{1}{m}})_t - u_{xx} + (u^{\frac{q}{m}})_x = u^{\frac{p}{m}} \quad (m,\ p,\ q \geqq 1)$$

で $2q \geqq m+1$ の場合である。

もし(A1)と(A2)を仮定すれば(1)(2)の連続で $x$ について有界な弱解が一意的に存在する。([5],[7])

まず、方程式(1)で特徴的なことは Interfaceの有限伝播性である。それを言うために次の条件を仮定する。

(A3) $\exists a_1 > 0,\ \varphi(x) > 0 \ . \ x \in (-a_1, a_1),\ = 0 \quad x \in (-a_1, a_1).$

(A4) $\dfrac{g'(v)}{\beta'(v)}$ は $v$ について単調増加, $\displaystyle\lim_{v \downarrow 0} \frac{g'(v)}{\beta'(v)} = 0$

(A5) $\beta(0) = f(0) = 0,\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\beta(v)}\, dv < \infty.$

(A4)(A5)の条件は(3)では、$m > 1$, $q > 1$ の場合である。

この時、Cauchy 問題(1)(2)の弱解 $u(x,t)$の Interface $\xi_i(t)$

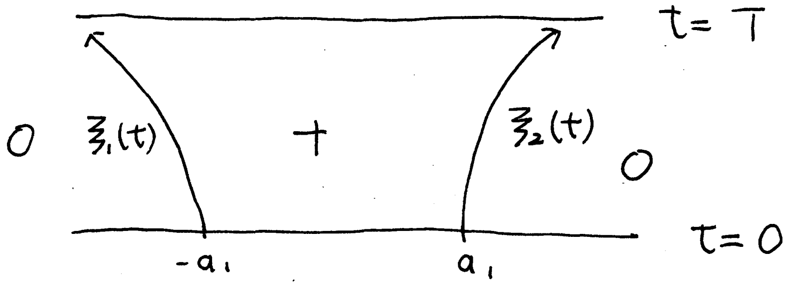
の有限伝播性を得る。

定理 I [8]

ある連続関数 $\xi_i(t): [0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して，各 $t \in (0, T)$ に対して

$$\{x \in \mathbb{R} \mid u(x, t) > 0\} = (\xi_1(t), \xi_2(t)).$$

ただし T は解の存在時間である。




本論で興味あるのは，Cauchy問題 (1)(2) の爆発解である。そこで blow-up するための必要条件

$$\text{(A6)} \qquad \int_1^\infty \frac{\beta'(v)}{f(v)}\, dv < \infty$$

を仮定する。この時，特別な方程式 (3) の場合，$p > m, q$ で初期値 $\varphi(x)$ が十分大きければ，解が有限時間で爆発することがわかっている。(Imai–Mochizuki [6] を参照) すなわち，ある時刻 $T \in (0, \infty)$ が存在して

$$\lim_{t \uparrow T} \sup_x u(x, t) = \infty$$

が成り立つ。この時刻$T$を爆発時間と言う。また、ある点列$(x_i, t_i) \in \mathbb{R} \times (0, T)$が存在して$x_i \to x$, $t_i \uparrow T$, $u(x_i, t_i) \to \infty$ $(i \to \infty)$が成り立つ点$x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$を$u(x,t)$の爆発点と呼ぶ。爆発点全体の集合を爆発集合と呼び、$S$で表す。

以下(1)(2)の爆発解$u(x,t)$について考える。特に興味を持っているのは、爆発時間$T$におけるInterface $\xi_i(t)$の挙動と爆発集合$S$の形を調べることである。

これについては、$g(v) \equiv 0$のとき次のような結果がある。

空間次元$n=1$のとき (R. Suzuki [9])

(i) $f(v)$の増大度が$v$に比べて極めて大きい場合、初期値$\varphi(x)$に技巧的条件を付え加えるなら

$$S \text{ は 有限集合、} \quad \lim_{t \uparrow T} |\xi_i(t)| < \infty$$

(ii) $f(v)$の増大度が$v$に比べて極めて小さい場合

$$S = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\},$$

$n > 1$のとき (Mochizuki - Suzuki [10])

(i) $\Longrightarrow$ $S$は有界集合でInterfaceは有限にとどまる。

(ii) $\Longrightarrow$ $S = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$, Interfaceは無限遠へ広がる。

特に(3)に限れば Galaktinov 等の結果もある。

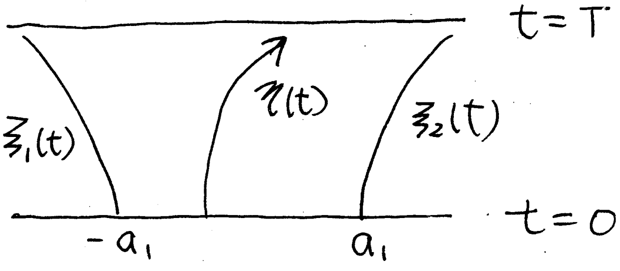
以下、一次元空間で、$g(v) \neq 0$のとき上の(i)と同じことが言えないか調べる。すなわち$f(v)$の増大度が$v$や$g(v)$

に比べて極めて大きいとき，爆発集合 $S$ が有限になるか調べたい。しかし、このままでは調べることが難しいので初期値 $\varphi(x)$ の形について次のような制限を与える。

(A7)　$\varphi(x)$ の極大点はただ一つ。


山一つ

この時、放物型方程式の解の性質より $t$ 秒後の山の頂点の位置，すなわち $u_x(x,t)=0$ なる点 $x$，の個数は常に1個で，その点を $x=\eta(t)$ と表すと，$\eta(t)$ は連続的に変化するということがわかる。([1] [2] [3] [8] を参照)

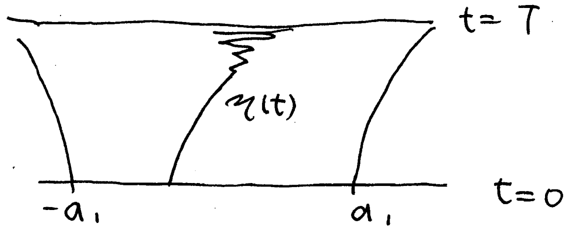



特に、$g(v)\equiv 0$ のとき方程式が Reflection について不変であることを用いて

(※)　$\exists \lim_{t\uparrow T} \eta(t) = \eta_0$ (とおく) が存在する

ことを示し，これを使って $S=\{\eta_0\}$ を示した。ところが $g(v)\not\equiv 0$ のときは方程式が Reflection について不変であ

ることが言えない，すなわち $v_a(x,t)=u(2a-x,t)$，$a\in\mathbb{R}$（$a$についての$u$の折り返し）は方程式(1)をみたさない。故に$\lim_{t\uparrow T}\eta(t)$の存在が言えるかどうかわからない。もし$\eta(t)$が振れた場合，$S=\{\eta_0\}$が言えない。




振れるかもしれない。

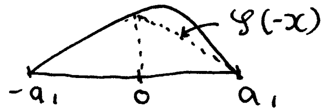
ここが方程式に$g(u)_x$が付いたときの難しいところである。本論では，(*)を示し$S=\{\eta_0\}$を言いたいので，(*)を示すための別の条件を捜す必要がある。これについては，方程式がsemilinearのときFriedman-Lacey[3]が次のような結果を得た。

Friedman-Lacey

$$u_t-u_{xx}+(u^2)_x=u^p \qquad (p>3)$$

に対し$(-a_1,a_1)$上のDirichlet問題を考える。
初期値$\varphi(x)$に対して次のような仮定をする。

$\varphi(x)$の極大点はただ一つ，$\varphi(-x)\leq\varphi(x)$　$x\in[0,a_1]$




山1つ

さらに

$$(**)\qquad \varphi_{xx}-(\varphi^2)_x+\varphi^p\geq 0 \ \text{ in } \mathcal{D}'$$

と仮定すれば，山の頂点の軌跡 $\eta(t) \geq 0$ で，$\lim_{t \uparrow T} \eta(t) = \eta_0$ が存在して，$S' = \{\eta_0\}$ となる。

Friedman-Lacey の結果より (**) すなわち $u_t \geq 0$ in $\mathcal{D}'$（これは最大値の原理より言える）が (*) を言うための条件であることが予測される。

従って，退化放物型方程の Cauchy 問題の場合も同様の仮定をする。すなわち

(A8) $\quad \varphi_{xx} - g(\varphi)_x + f(\varphi) \geq 0 \quad in \ \mathcal{D}'$

さらに $f(v)$ の増大度が $v$ や $g(v)$ に比べて極めて大きいと仮定する：

(A9) ある $C^2$-関数が存在して

(i) $\quad F(v), F'(v), F''(v) > 0 \quad$ for $v > 0$

(ii) $\quad \displaystyle\int_1^\infty \frac{d\xi}{F(\xi)} < \infty$

(iii) ある定数 $c > 0$ と $v_0 > 0$ が存在して

$$f'F - F'f - \frac{1}{2}(g')^2 F \geq c(F^2 g'' + F'F) \quad v \geq v_0$$

注意 (A9) の条件は (3) で $p + m > 2q$，$p > m, q > 1$

の場合にあたる。

この時，Friedman-Laceyの結果を退化放物型方程式のCauchy問題に拡張できる。

<u>定理２（[8]）</u>

（A8）を仮定すれば，$\lim_{t \uparrow T} \eta(t) = \eta_0$ が存在し $\eta_0 \in (-a_1, \infty]$，さらに（A9）を仮定すれば，$S' = \{\eta_0\}$。$\eta_0 > -\infty$ である事実を用いて，$t \uparrow T$ のとき左側のInterfaceが有限にとどまる。すなわち $\lim_{t \uparrow T} \xi_1(t) > -\infty$.

最後に残った問題は，$\eta_0 < \infty$ か $\eta_0 = \infty$ どちらが成り立つかという問題である。この問題に対してはさらに方程式と初期値 $\varphi(x)$ に対して次の仮定をする。

（A10）ある $C^2$-関数 $\Phi(v)$ が存在して

(i) $\Phi(v), \Phi'(v), \Phi''(v) > 0$ for $v > 0$. $\Phi(0) = 0$.

(ii) $$\int_1^\infty \frac{d\xi}{\Phi(\xi)} < \infty$$

(iii) ある正の定数 $c > 0$ と $v_1 > 0$ が存在して

$$4\Phi''(f'\Phi - \Phi' f) \geq (g'')^2 \Phi \quad \text{for } v \geq v_1$$

であり

$$\frac{(g'')^2\Phi}{\Phi''\beta'} + \frac{f\Phi'}{\Phi\beta'} < C \quad \text{for } 0 \le v \le v_1$$

(iv) $\displaystyle\int_0^1 \sup_{0\le v\le H^{-1}(t)+1} \frac{g'(v)}{\beta'(v)}\,dt < \infty$

ただし $\displaystyle H(\xi) = \int_\xi^\infty \frac{d\eta}{\Phi(\eta)}$

(v) $\varphi'' - g(\varphi)' + f(\varphi) \ge \Phi(\varphi)$ in $\mathcal{D}'$.

注意 (A10) の仮定は，$f(v)$の増大度が$v$や$g(v)$に比べて極めて大きいという仮定で (3)の方程式に対して言えば $p+m > 2q$ $(2m-1 \le q)$, $p+1 > q+m$ $\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2} \le q \le 2m-1\right)$ の場合にあたる。方程式(3)に限れば (A10) の条件は (A9) の条件より強い条件になる。

定理3 ([8])

定理2においてさらに (A10)を仮定すれば，$\eta_0 < \infty$，この事実を用いて右側の Interface も有限にとどまる．すなわち $\lim_{t\uparrow T} \xi_2(t) < \infty$.

## 参考文献


[1] S. Angenent, The zeroset of a solution of a parabolic equation, J. Reine Angew. Math., 390(1988) 79-96.

[2] Chen X.-Y. and H. Matano, Convergence, asymptotic periodicity and finite-point blow-up in one-dimensional semilinear heat equations, J. Differential Equations, 78 (1989) 160-190.

[3] A. Friedman and A.A. Lacey, Blow-up of solutions of semilinear parabolic equations, J. Math. Anall. Appl. 132 (1988), 171-186.

[4] V.A. Galaktinov, Proof of the localization of unbounded solutions of the non-linear partial differential equation $u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\beta$, Differntial'nye Uravneniya, 21 (1985) 15-23; Differential Equations, 21(1985), 11-18.

[5] B.H. Gilding, A nonlinear degenerate parabolic equation, Ann Scuola Norm. Sup. Pisa, 4(1977), 393-432.

[6] T. Imai and K. Mochizuki, preprint.

[7] O.A. Oleinik, A.S. Kalashinikov and Chzou Yui-Lin, The Cauchy problem and bounadary problems for

equations the type of nonlinear filtration, Izv, Akad. Nauk SSSR Ser. Math., 22 (1958), 667-704 (Russian)

[8] R. Suzuki, Blow-up solutions of quasilinear degenerate parabolic equations with convection, preprint

[9] R. Suzuki, On-blow-up sets and asymptotic behavior of one dimensional quasilinear degenerate parabolic equations, Publ. RIMS, kyoto Univ., 27 (1991), 375-398.

[10] K. Mochizuki and R. Suzuki, Blow-up sets and asymptotic behavior of interfaces for quasilinear degenerate parabolic equations in $\mathbb{R}^n$, J. Math. Soc. Japan. 44 (1992) 485-504